Эконометрика из проверки знаний:

Модель парной регрессии со свободным членом и без свободного члена.

Пусть у нас есть набор значений двух переменных X_t, Y_t, t = 1, ..., n; можно отобразить пары (X_t , Y_t) точками на плоскости.

Предположим, что нашей задачей является подобрать ("подогнать") функцию Y = f(X) из параметрического семейства функций f(X,β), "наилучшим" способом описывающую зависимость Y от X, то есть выбрать наилучшее значение β.

Запишем уравнение зависимости Y_t от X_t, в виде

$$Y_t = a + bX_t + \epsilon_t, t = 1, ..., n,$$

где X - неслучайная (детерминированная) величина, а Y_t, eps_t - случайные величины, Y_t называется объясняемой (зависимой) переменной, а X_t - объясняющей (независимой) или регрессором. Уравнение, приведенное выше, также называется регрессионным уравнением.

Если убрать коэффициент а, то будет без свободного члена.

Модель множественной регрессии.

Естественным обобщением линейной регрессионной модели с двумя переменными (см. п. 2.3) является *многомерная регрессионная модель* (*multiple regression model*), или *модель множественной регрессии*:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \qquad t = 1, \ldots, n,$$

или

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \qquad t = 1, \ldots, n, \qquad (3.1)$$

где x_{tp} — значения регрессора x_p в наблюдении t, а $x_{t1} = 1$, $t = 1, \ldots, n$. С учетом этого замечания мы не будем далее различать модели вида (3.1) со свободным членом или без свободного члена.

Процесс белого шума

2 Процесс белого шума

Процессом беого шума ("белым шумом "чисто случайным временным рядом") называют стационарный временной ряд x_t, для

которого

$$E(X_t) \equiv 0, D(X_t) \equiv \sigma^2 > 0$$

и

$$\rho(\tau) = 0, \text{ при } \tau \neq 0.$$

Последнее означает, что при $t \neq s$ случайные величины X_t и X_s, соответствующие наблюдениям процесса белого шума в моменты t и s, некоррелированы.

$\rho(\tau) = Corr(X_t, X_{t+\tau})$

Строгая стационарность ряда (стационарность в узком смысле)

Ряд x_t, $t = 1, ...n$ называется **строго стационарным** (или **стационарным в узком смысле**), если для любого m ($m < n$) совместное распределение вероятностей случайных величин $X_{t_1}, ..., X_{t_m}$, такое же как и для $X_{t_1+\tau}, ..., X_{t_m+\tau}$, при любых $t_1, ..., t_m$ и τ, таких, что $1 \leq t_1, ..., t_m \leq n$ и $1 \leq t_1 + \tau, ..., t_m + \tau \leq n$, т.е функция плотности при сдвиге во времени не изменится

$$P\{x_{t_1}, ..., x_{t_m}\} = P\{x_{t_1+\tau}, ..., x_{t_m+\tau}\}$$

В частности, при $m = 1$ из предположения о строгой стационарности временного ряда x_t следует, что закон распределения вероятностей случайной величины X_t не зависит от t, а значит, не зависят от t и все его основные числовые характеристики (если, конечно, они существуют), в том числе: математическое ожидание $E(X_t) = \mu$ и дисперсия $D(X_t) = \sigma^2$.

Стационарный в широком смысле ряд (слабо стационарный)

В связи с этим под стационарным рядом на практике часто подразумевают временной ряд x_t, у которого

- $E(X_t) \equiv \mu$
- $D(X_t) \equiv \sigma^2$
- $Cov(X_t, X_{t+\tau} = \gamma(\tau)$ для любых t и τ.

Ряд, для которого выполнены указанные три условия, называют **стационарным в широком смысле (слабо стационарным, стационарным второго порядка** или **ковариационно стационарным)**.

Процесс авторегрессии порядка p (AR(p))

Модель $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$ называют **процессом авторегрессии первого порядка**.

Процесс авторегрессии порядка p (в кратком обозначении - AR(p)) определяется соотношениями

$$X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \ldots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t, \; a_p \neq 0,$$

где ε_t - процесс белого шума с $D(\varepsilon_t t) = \sigma_\varepsilon^2$.

Процесс скользящего среднего порядка q (MA(q))

Еще одной простой моделью порождения временного ряда является процесс **скользящего среднего порядка** q ($MA(q)$). Согласно этой модели,

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + b_2\,\varepsilon_{t-2} + \ \ldots\ + b_q\,\varepsilon_{t-q}, \quad b_q \neq 0,$$

где ε_t — процесс белого шума.

Такой процесс имеет нулевое математическое ожидание. Модель можно обобщить до процесса, имеющего ненулевое математическое ожидание μ, полагая

$$X_t - \mu = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + b_2\,\varepsilon_{t-2} + \ \ldots\ + b_q\,\varepsilon_{t-q}\,,$$

т.е.

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + b_2\,\varepsilon_{t-2} + \ \ldots\ + b_q\,\varepsilon_{t-q}.$$

Для процесса скользящего среднего порядка q используется обозначение $MA(q)$ (скользящее среднее — **moving average**).

Смешанный процесс авторегрессии – скользящего среднего (процесс авторегрессии с остатками в виде скользящего среднего)

ARMA(p,q):

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \ldots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + b_q \epsilon_{t-q}, \quad a_p \neq 0, \ \ b_q \neq 0, \ \ \epsilon_t - \textit{белый шум} \quad (1)$$

Процесс X_t с нулевым математическим ожиданием, принадлежащий такому классу процессов, характеризуется порядками p и q его AR и MA составляющих и обозначается как процесс **ARMA(p, q)** **(autoregressive moving average, mixed autoregressive moving average)**. Более точно, процесс X_t с нулевым математическим ожиданием принадлежит классу $ARMA(p,q)$, если:

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \epsilon_{t-j}, \qquad a_p \neq 0, \ \ b_q \neq 0, \ \ \mathbb{E}\, X_t = 0 \qquad (2)$$

где ϵ_t – процесс белого шума и $b_0 = 1$. В операторной форме последнее соотношение имеет вид

$$a(L) = 1 - (a_1 L + a_2 L^2 + \ldots + a_p L^p) \qquad (3)$$

$$b(L) = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + \ldots + b_q L^q \qquad (4)$$

$$a(L) X_t = b(L) \epsilon_t, \qquad (5)$$

т.е. $a(L)$ и $b(L)$ имеют тот же вид, что и в определенных ранее моделях $AR(p)$ и $MA(q)$. Если процесс имеет постоянное математическое ожидание μ , то он является процессом типа $ARMA(p,q)$, если

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{p} a_j (X_{t-j} - \mu) + \sum_{j=0}^{q} b_j \epsilon_{t-j} \qquad (\mathbb{E}\, X_t = \mu \neq 0) \qquad (6)$$

Нестационарный процесс авторегрессии-интегрированного скользящего среднего ARIMA (p,d,q). Подход Бокса-Дженкинса построения модели типа ARIMA (p,d,q) по реализации временного ряда.

Билет 11. Нестационарный процесс авторегрессии-интегрированного скользящего среднего ARIMA (p,d,q). Подход Бокса-Дженкинса построения модели типа ARIMA (p,d,q) по реализации временного ряда.

Модель $ARIMA$ применяется в тех случаях, когда исследуемый ряд нестационарен. Ряд становится стационарным при помощи оператора разности:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

$$\Delta^k X_t = \Delta^{k-1} X_t - \Delta^{k-1} X_{t-1}$$

Модель $ARIMA(p,d,q)$ выглядит следующим образом:

$$\Delta^d X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j \Delta^d X_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Оператор разности степени d позволяет привести к стационарному виду ряд с трендом степени d.

Подход Бокса-Дженкинса

Этот подход служит для выбора типа модели $ARIMA$ по временному ряду. Он включает в себя следующие этапы:

1) **Идентификация модели**
   Если ряд стационарен, то, начиная с какого-то номера, его автокорреляции начнут убывать. Если этого не происходит, то сначала нужно привести ряд к стационарному, выбрав порядок интеграции d. Обычно $d \leq 2$.
   К полученному ряду нужно подобрать параметры p и q модели $ARMA(p,q)$.
2) **Оценка модели**
   На этом этапе, с уже известными p и q, оцениваются коэффициенты $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots b_q$.
3) **Диагностика и тестирование модели**
4) **Использование модели для прогнозирования будущих значений временного ряда**

1.Формулировка задачи оптимизации поиска равновесных объемов и цен в сетевом аукционе поставщиков и потребителей одного товара с ограничениями на передачу. Определение равновесных цен в сетевом аукционе. Финансовый баланс в сетевом аукционе с ограничениями на передачу.

Есть задача оптимизации. Целевая функция – функция благосостояния рынка (по сути разность между тем, что готовы заплатить потребители за товар и тем, сколько на производство этого товара тратят производители) и максимизируем благосостояние рынка.

Так как рассматриваем сетевой аукцион, то у нас есть несколько узлов, по которым разбросаны потребители и производители. Так как между узлами есть расстояние, то есть некоторые ограничения на передачу товара. Соответственно в нашу задачу оптимизации добавляется ограничения на линии передач.

Задачу оптимизации решаем с помощью функции Лагранжа. Находим множителей Лагранжа, один из этих множителей и будет равновесной ценой.

Финансовый баланс: сумма того что потребители потребляют в узле s – сумма того, что генераторы производят для узла s = поток из узла s в другие узлы – поток из других узлов в s. Если домножим это все на равновесную цену в узле s, то

Просуммируем правую и левую части по s:

$$\sum_s \lambda_s \left(\sum_{п\in П_s} x_п\right) - \sum_s \overset{\lambda_s}{\left(\sum_{г\in Г_s} x_г\right)} = \text{сумма денег, заплаченных потребителями - сумма денег, полученных генераторами}$$

\lambda_s пропущена

4. Происходит планирование состава генерирующего оборудования на двое суток вперед. За двое суток планируем сколько будут потреблять энергии, за сутки происходит аукцион, на котором поставщики назначают свои цены. В общем случае, задача формулируется как задача минимизации стоимости работы, пусков и остановки генерирующего оборудования. Бинарные переменные говорят только о том, будет работать генератор или нет в момент времени t.

В задаче с бинарными индикаторами может нарушать принцип индивидуального рационального решения, так как могут быть ограничения системные (то есть максимальный поток мощности и т.д.).

5. Мат и фин балансы. Описание одного из экономических агентов в однопродуктовой модели.

Есть множество агентов на рынке. Для агента изменение запаса ресурсов = производство продукта – конечное потребление – затраты на производство – капитальные затраты – передача продукта.

Просуммировав для всех агентов получим основное макроэкономическое тождество:

ВВП (чистый выпуск) = конечное потребление + накопления (капитальные затраты) + (экспорт – импорт)(передача товара).

Каждому потоку товара соответствует поток денег. Поэтому можно получить соответствующие финансовые балансы. В зависимости от типа агента составляющие основного макроэкономического тождества имеют свои наименования (добавляются банковские проценты, поддержка государства населению, зарплаты и т.д.).

6. Динамические межотраслевые модели. Понятия траектории, стационарной траектории, динамического равновесия.

Динамическая межотраслевая модель. Важно тут, что у нас рассматривается T период времени t = [0, 1], …, [t-1, t], [t, t + 1], …,[T-1, T]. То есть мы произвели в период [t – 1, t] можем продать в период [t, t + 1]. При этом соответственно продать и использовать в производственных нуждах можем не больше, чем было произведено в прошлый период.

Также эк. система замкнута – то есть выполняется закон сохранения денежной массы, то есть все что получено производителем распределено между потребителями.

Последовательность векторов интенсивностей производства {x(T)} = x(1), x(2), …, x(T), которая удовлетворяет условию, что мы используем на производство и потребление не больше, чем произвели в прошлый момент времени, **называется планом.**

Стационарная траектория.

Определение. Траектория $\{x(t)\}$ называется ***стационарной***, если существует число $\nu > 0$, такое что $x(t) = \nu x(t-1)$ (или $x(t) = \nu^t x(0)$).

Необходимое и достаточное условие стационарности в модели Неймана.

Для того чтобы траектория интенсивностей $\{x(t)\} = \{\nu^t x\}$ была стационарной в модели Неймана, необходимо и достаточно, чтобы $\nu Ax \le Bx$. Аналогично, траектория цен $\{p(t)\} = \{\mu^{-t} p\}$ стационарная тогда и только тогда, когда $\mu pA \ge pB$.

Динамическое равновесие в модели Неймана.

Определение. Модель Неймана находится в состоянии динамического равновесия, описываемого параметрами (ν, μ, x, p), где числа $\nu > 0$, $\mu > 0$, а x, p – неотрицательные векторы, если

$$\nu Ax \le Bx, \quad \mu pA \ge pB, \quad \mu pAx = pBx, \quad \nu pAx = pBx. \qquad (2.12)$$

Невырожденное положение равновесия в модели Неймана.

Из системы (2.12) следует, что $\nu = \mu \overset{def}{=} \alpha$, т.е. темп роста интенсивности производства и темп падения цен совпадают.

Определение. Невырожденным положением равновесия в модели Неймана называется тройка (α, x, p), где $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^m$, $p \in \mathbb{R}_+^n$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\alpha Ax \le Bx \tag{2.13}$$

$$\alpha pA \ge pB \tag{2.14}$$

$$pAx > 0. \tag{2.15}$$

7. Модель Вальраса. Модель динамического равновесия вальрасовского типа, существование равновесных траекторий.

Много потребителей, много производителей, которые максимизируют прибыль (разница между полученным доходом и затратами).
Рынок товаров с совершенной конкуренцией, то есть каждый участник отдельно не в состоянии повлиять на цену.
Замкнутая экономическая система (полученная производителями прибыль распределяется между потребителями).

Существует N типов товаров , L потребителей с функцией дохода $K(p) = (b^i, p) + I(p)$, где b^i начального запаса товаров и дополнительный дохода $I_i(p)$ и функцией спроса $F_i(p)$.

M производителей, каждый имеет производственный процесс (x, y). Цель производителя максимизация прибыли.

Вектор равновесных цен:

Определение. Вектор p^* называется вектором равновесных цен, многозначное отображение $\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$ – функцией совокупного спроса, отображение $\Psi(p) = b + \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p)$, где $b = \sum_{i=1}^{l} b^i$, – функцией совокупного предложения.

Закон Вальраса: <p, x> <= <p, y> (спрос не превосходит предложения).

Конкурентное равновесие (по сути достигается, когда в законе Вальраса выполняется равенство, что логично у нас спрос полностью покрывается предложением).

Определение. Набор (y^*, x^*, p^*) называется конкурентным равновесием если $x^* \in \Phi(p^*)$, $y^* \in \Psi(p^*)$, $x^* \le y^*$ и $\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$.

8. Описание модели Рамсея. Магистральное свойство сбалансированного роста.

Суть модели Рамсея, если не вдаваться в уравнения

Односекторная экономику, совокупность независимых производителей, выпускает однородный продукт.

Режим сбалансированного роста – такая ситуация в экономике, когда у нас все переменные из уравнений описывающих модель Рамсея растут с одинаковым темпом роста. Для модели Рамсея при постоянной норме накопления (один из параметров модели s(t) = conts) все траектории сходятся к режиму сбалансированного роста.

Магистральное свойство сбалансированного роста:

Магистральное свойство сбалансированного роста:

Если при фиксированном начальном условии k_0 увеличивать горизонт планирования T, то все большая часть оптимальной траектории будет совпадать со сбалансированным ростом, а значение функционала на оптимальной траектории будет приближаться к значению душевого потребления на оптимальном сбалансированном росте. Это явление – слабая зависимость оптимальных траекторий от начальных условий (а фактически и от конкретного вида функционала) при больших горизонтах планирования – называется магистральным свойством.

k = bM(t)/L(t) – фондовооруженность труда, M(t) – масштабирует распределение мощностей (производственные мощности), b – приростная фондоемкость, L(t) – рабочая сила.

Магистральное свойство – слабая зависимость оптимальных траекторий задачи от начального условия фондовооруженности (фактически и от конкретного функционала). То есть при большом горизонте планирования все сходится к ситуации сбалансированного экономического роста.

9. Существование равновесия в модели Неймана.

Можно описать модель Неймана (см. Билет 6, так как там идет описание модели Неймана).

При выполнении условий, что в матрице A нет нулевых столбцов, а в матрице B нет нулевых строк существует невырожденное положение равновесия в модели Неймана.

Определение. Невырожденным положением равновесия в модели Неймана называется тройка (α, x, p), где $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^m$, $p \in \mathbb{R}_+^n$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\alpha Ax \le Bx \qquad (2.13)$$

$$\alpha pA \ge pB \qquad (2.14)$$

$$pAx > 0 . \qquad (2.15)$$

Теорема. Пусть в модели Неймана $A \ge 0$, $B \ge 0$ и в матрице A нет нулевых столбцов, в матрице B нет нулевых строк. Тогда существует решение системы (2.13)-(2.15).

10. Модель парной линейной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

Описание модели написано в начале файла.

Метод наименьших квадратов (МНК).

Пусть $f(x, \beta)$ – линейная функция с параметрами α и β: $Y = f(X, a, b)$ = $a + bX$. Метод наименьших квадратов позволяет подобрать наилучшие параметры путем решения задачи оптимизации:

$$F = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - f(X_t, \beta))^2 \to \min$$

Записав необходимые условия экстремума(производная равна 0), и решив систему уравнений, получаем оптимальные параметры:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t, \quad \hat{b} = \frac{n \sum X_t Y_T - \sum X_t \sum Y_t}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{Cov(X, Y)}{Vat(X)}$$

Теорема Гаусса-Маркова

В модели линейной регрессии с двумя параметрами оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$, полученные методом наименьших квадратов, имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок.

11. Модель множественной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

Модель множественной регрессии смотри выше.

Метод наименьших квадратов

Целью метода является выбор вектора оценок $\widehat{\beta}$, минимизирующего сумму квадратов остатков e_t (необъясненную часть дисперсии).

$$e = y - \widehat{y} = y - X\widehat{\beta},$$
$$ESS = \sum e_t^2 = e'e \to \min_{\widehat{\beta}}$$

Выразим $e'e$ через X и β:

$$e'e = y'y - 2\widehat{\beta}'X'y + \widehat{\beta}'X'X\widehat{\beta}.$$

Необходимые условия минимума ESS получаются дифференцированием по вектору $\widehat{\beta}$

$$\frac{\partial ESS}{\partial \widehat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\widehat{\beta} = 0,$$

откуда, учитывая обратимость матрицы $X'X$ находим оценку метода наименьших квадратов:

$$\widehat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Теорема Гаусса-Маркова аналогична для парной регрессионной модели.

12. Понятие временного ряда. Понятие строго стационарного временного ряда. Условия стационарности временного ряда в широком смысле.

Под временным рядом понимается последовательность наблюдений значений некоторой переменной, произведенных через равные промежутки времени. Если принять длину такого промежутка за единицу времени (год, квартал, день и т.п.), то можно считать, что последовательные наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ произведены в моменты $t = 1, \ldots, n$.

Понятие строго стационарного временного ряда. Смотри выше.

Понятие стационарного ряда в широком смысле (слабо стационарный ряд тоже смотри выше).

13. Нестационарный процесс авторегрессии – интегрированного скользящего среднего ARIMA(p, d, q).

Определение выше.

14. Подход Бокса-Дженкинса построения модели типа ARIMA(p,d,q) по реализации временного ряда.

Тоже написан выше.

15. Статистические свойства МНК оценок.

Основное что можно сказать, что оценки имеют нормальное распределение, с МО значением реальных коэффициентов. И дисперсией как на фото.

Свойства МНК-оценок

МНК-оценки коэффициентов регрессии $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ имеют совместное нормальное распределение:

$\widehat{a} \sim N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right)$, $\quad \widehat{b} \sim N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2}\right)$, где $x_t = X_t - \overline{X}$, $\overline{X} = \frac{\sum X_t}{n}$

Отсюда получаем, что $\hat{b} - b \sim N(0, \sigma_{\hat{b}}^2)$, где $\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$

$\widehat{Var}(\hat{b}) = s_{\hat{b}}^2 = s^2 \frac{1}{\sum (X_t - \overline{X})^2} = \frac{s^2}{\sum x_t^2} \Rightarrow \frac{\hat{b} - b}{\sigma_{\hat{b}}} \sim N(0, 1)$

Учитывая, что распределение оценки дисперсии ошибок $s^2 = \widehat{\sigma^2}$ имеет распределение: $\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$, получим

$\frac{s}{\sigma} \sim \sqrt{\frac{1}{n-2}\chi^2(n-2)} \Rightarrow$ {по определению статистики Стьюдента} $\Rightarrow t = \frac{(\hat{b}-b)/\sigma_{\hat{b}}}{s/\sigma} \sim t(n-2)$, где $t(n-2)$ — Т-статистика Стьюдента с $(n-2)$степенями свободы.

Так как $\frac{\sigma_{\hat{b}}}{\sigma} = \frac{s_{\hat{b}}}{s}$ получим $t = \frac{\hat{b} - b}{s_{\hat{b}}} \sim t(n-2)$ $(*)$

Аналогично показываем, что $t = \frac{\hat{a} - a}{s_{\hat{a}}} \sim t(n-2)$.

16. Коэффициент детерминации и проверка гипотезы H_0: b = b_0

Коэффициент детерминации R^2

Рассмотрим вариацию значения Y_t вокруг среднего значения Y : $\sum(Y_t - \overline{Y})^2$.

Разбиваем вариацию на две части, объясненную часть дисперсии и не объясненную.

И получим по итогу

$$\sum(Y_t - \overline{Y})^2 = \sum(Y_t - \widehat{Y_t})^2 + \sum(\widehat{Y_t} - \overline{Y})^2 + 2\sum(Y_t - \widehat{Y_t})(\widehat{Y_t} - \overline{Y}) \sim$$
$$TSS = ESS + RSS + 2\sum(Y_t - \widehat{Y_t})(\widehat{Y_t} - \overline{Y})$$

TSS – вся дисперсия. ESS – необъясненная часть дисперсии. RSS – объясненная часть дисперсии.

Коэффициентом детерминации называется $R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS}$.

$R^2 \in [0, 1]$, если $R^2 = 0$, то регрессия ничего не дает, $R^2 = 1$ — точная подгонка.

17. Статистические свойства оценок по методу наименьших квадратов параметров множественной регрессии. – не буду писать в теормине.

Коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

Коэффициент детерминации определяется также для множественной регрессии.

Свойства R^2:

1. R^2 возрастает при добавлении еще одного регрессора.
2. R^2 изменяется даже при простейшем преобразовании зависимой переменной, поэтому сравнивать по значению R^2 можно только регрессии с одинаковыми зависимыми переменными.

Свойства скорректированного R^2

1. $R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$
2. $R^2 \geq R^2_{adj}, k > 1$.
3. $R^2_{adj} \leq 1$, но может принимать значения < 0.

19. Модели процессов авторегрессии и скользящего среднего: AR(p), MA(q) и ARMA(p,q). Условия стационарности этих процессов.

Определения процессов даны выше. Условие стационарности этих процессов, то что корни характеристического уравнения, то есть коэффициенты регрессии умножаются на лямбду нужной степени и их сумма равна = 0. Все корни этого уравнения должны лежать вне единичного круга.

23. Сформулируйте необходимые и достаточные условия продуктивности неотрицательной, неразложимой матрицы в модели Леонтьева

Теорема (Фробениуса-Перрона). Если неотрицательная матрица A неразложима, то у неё существует собственное число λ_A такое, что для любого другого собственного числа λ справедливо $|\lambda| < \lambda_A$, а соответствующий правый собственный вектор-столбец $\mathbf{x}_A$, $(A\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A)$, и левый собственный вектор-строка $\mathbf{y}_A$, $(\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A)$, положительны.

Собственное число λ_A называют *фробениусовым числом*, а векторы $\mathbf{x}_A$, y_A – правым и левым *фробениусовыми векторами*.

Утверждение 3. Если A неотрицательная неразложимая матрица, то при $r < R$ ее фробениусово число $r < \lambda_A < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$.

Определение 3. Неотрицательную матрицу A назовём *продуктивной*, если существует неотрицательная матрица $(E – A)^{-1}$.

Утверждение 4. Неотрицательная неразложимая матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда её фробениусово число $\lambda_A < 1$.

24. Модель Краснощекова коллективного поведения.

Модель Краснощекова описывает способ вычисления апостериорной вероятности принятия решения (после общения с коллективом) $s = 1$ с учетом коэффициента индивидуализма (свое мнение).

Если коэффициент индивидуализма = 1, то лицо полностью независимое от чужого мнения, а если = 0, то меняет свое мнение в угоду собеседника.

Если у всех в коллективе коэффициент индивидуализма = 0, то коллектив стадо, но при этом они движутся не хаотично, а копируют поведение друг друга, но как только появляется в стаде индивидуум с коэффициент индивидуализма > 0, то все начинают копировать его поведение.

25. Популяционные игры.

Популяционная игра - статическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов.

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется такое распределение π^* , что всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω. (например, общей численности популяции и состояния внешней среды)

Понятие **Эволюционно устойчивой стратегией** можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^*, внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям

π. Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^*.

26. Модель динамики репликаторов.

В МДР предполагается, что в однородной популяции новые индивидуумы (потомки) наследуют стратегии родителей и сохраняют их в течение всего времени жизни.

28. Модель взаимодействия родственников. Утверждение о доминирующей стратегии. Распространение альтруизма и кооперации.

Есть поведение по отношению к братьям и сестрам (которые скопировали поведение родителей) и ко всем остальным.

При кооперировании общий выигрыш больше, чем общий выигрыш при эгоистичном поведении, но при этом для индивидуума поступающего эгоистично, его личный выигрыш выше. (хищники экономят свою энергию на охоте – эгоисты, страдает общий результат охоты).

При альтруизме, у нас альтруист получает наименьший выигрыш в угоду общему выигрышу, (родители и дети).

29-30.

Есть многоуровневая налоговая инспекция, то есть у нас есть налогоплательщики, которые могут соврать о своих налогах. Есть инспекторы, которые всегда выявляют факт нарушения, но могут вступить в сговор, то есть получить взятку в угоду своих личных интересов и скрыть факт нарушения правила уплаты налогов. Далее идет следующий уровень проверки, аналогично может вступить в сговор, но если «сдаст», то инспекторы предыдущих уровней и налогоплательщики платят штраф.
Есть самый высокий уровень не подкупных проверяющих, но проблема в том, что цена их работы очень высока (цена работы проверяющих более низких уровней дешевле).

Задача состоит в нахождении стратегии инспекции, подавляющей коррупцию и обеспечивающей правильные действия агентов нулевого уровня с минимальными издержками на проверки.